Дәріс 15

Потенциалдарды анықтау

R^n кеңістікте S шекарамен шектелген Ω аймақ болсын. $\mu(y)\in C(\Omega)$ - үзіліссіз функция делік.

$$u(x)=\int_{\Omega}E_n(x,y)\mu(y)dy \qquad (1)$$

көлемдік потенциалдық кейбір шекаралық есептерді шешуге қажетті қасиеттеріне келтірейік.

Егер көлемдік потенциалдың тығыздығы $\mu(y)\in C^1(\Omega)$ және шектелсе, онда көлнмдік потенциал Ω^+ (ішкі) аймақта

$$\Delta u(x)=-\omega_n\mu(x), \qquad x\in\Omega^+$$

Пуассон теңдеуін қанағаттандырады, мұндағы

$$\omega_n=\begin{cases}2\pi, & n=2\\ 4\pi, & n=3\end{cases}$$

Бұл қасиетті қолданып

$$\Delta u(x)=f(x)\in C^1(\Omega^+),\ f(x)=-\omega_n\mu(x))$$

Пуассон теңдеуінің жеке шешімін

$$u_0(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int_{\Omega^+}f(y)E_n(x,y)dy$$

анықтай аламыз.

Біртексіз Пуассон теңдеуіне $u(x)=u_0(x)+v(x)$ өрнекпен жаңа v(x)белгісіз функция енгізу нәтижесінде $\Delta v(x)=0$ -Лаплас теңдеуін аламыз.

Демек, Пуассон теңдеуі үшін қойылған шекаралық есепті Лаплас теңдеуі үшін есепке келтіріп шешеміз.

$$w(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_S\mu(y)\frac{\partial E_n(x,y)}{\partial v_y}d\sigma_y \quad \text{- қосқабаттық} \qquad (2)$$

$$v(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_S\mu(y)E_n(x,y)d\sigma_y \quad \text{- жайқабаттық} \qquad (3)$$

потенциалдар деп аталады.Соңғы екі потнциалдардың Ω^+ аймақтан Ω^- аймаққа өткенде мынадай қасиеттер орынды:

$$w^+(x_0)=-\frac{1}{2}\mu(x_0)+w(x_0),$$

$$w^-(x_0)=\frac{1}{2}\mu(x_0)+w(x_0), \qquad (4)$$

мұндағы $w(x_0)=\frac{1}{\omega_n}\int_S\mu(y)\frac{\partial E_n(x_0,y)}{\partial v_y}d\sigma_y$ және

$$\left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial v_{x_0}}\right)^+=\frac{1}{2}\mu(x_0)+\frac{\partial v(x_0)}{\partial v_{x_0}}, \qquad (5)$$

$$\left(\frac{\partial v(x_0)}{\partial v_{x_0}}\right)^-=-\frac{1}{2}\mu(x_0)+\frac{\partial v(x_0)}{\partial v_{x_0}},$$

ал мұндағы $\dfrac{\partial v(x_0)}{\partial v_{x_0}} = \dfrac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mu(y)\dfrac{\partial E_n(x_0,y)}{\partial v_{x_0}}dS_y$

Мысал: Тығыздығы $\mu(y) = \mu_0 = const$ болған |x|<R шардағы көлемдік потенциалды есептеңіз.
Шешуі: есепті шешуге (1) көлемдік потенциал өрнегін және сфералық координата жүйесін пайдаланамыз, яғни

$$u(x) = \int\limits_\Omega \mu_0 \frac{dy}{|x-y|} = \begin{vmatrix} y_1 = r\sin\theta\cos\psi, \\ y_2 = r\sin\theta\sin\psi, \\ y_3 = r\cos\theta, \end{vmatrix} =$$

$$= \mu_0 \int\limits_0^R r^2 dr \int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\psi = \frac{4\pi\mu_0 R^3}{3}.$$

Ескерту: Жай және қосқабаттық потенциалдарды есептегенде сәйкес түрде $d\sigma_y = rd\psi$ немесе $d\sigma_y = r^2\sin\theta d\psi d\theta$ болған бет элементтерін пайдаланған қолайлы.